Catatan Kuliah MA1223 Kalkulus Elementer II

Oki Neswan,Ph.D., Departemen Matematika-ITB

Bab 8 Teknik Pengintegralan

- Metoda Substitusi
- Integral Fungsi Trigonometrik
- Substitusi Merasionalkan
- Integral Parsial
- Integral Fungsi Rasional

1

Pendahuluan

- Operasi turunan turunan sifatnya algoritmik. Apabila semua aturannya telah diketahui, maka dapat dapat disusun 'resep turunan'. Dalam banyak hal operasi turunan tidak terlalu menuntut keratifitas.
- Tidak demikian halnya denagn opersai integral. Seringkali integral yang berbeda menuntut kombinasi tehnik-metoda pengintegralan yang berbeda: pengintegralan lebih merupakan seni.
- Banyak masalah dalam *engineering* yang melibatkan integral dari fungsi yang sangat rumit, sehingga kita memerlukan Tabel Integral.
- Beberapa metoda yang sangat esensial adalah :
  - Metoda Substitusi
  - Metoda Integral Parsial
  - Integral Pecahan Parsial (*Partial Fraction*)

1. Integral dengan Substitusi

Rumus dan Aturan Pengintegralan yang sudah kita kenal sejauh ini cukup bermanfaat dan penting, namun *scope*-nya masih terbatas. Sebagai contoh dengan Aturan Pangkat kita dapat menyelesaikan $\int \sqrt{x}dx$. Namun tidak berdaya untuk menyelesaikan integral yang 'serupa' yaitu

$$\int \sqrt{2x+1}dx$$

Integral dengan mudah diselesaikan dengan menggunakan teknik substitusi. Ide dasar metoda substitusi datang dari Aturan Rantai. Teknik adalah 'kebalikan' dari Aturan Rantai.

Penjelasan Aturan Substitusi

Misalkan F adalah antiturunan dari f. Jadi, $F'(u)=f(u)$, dan

(1) $$\int f(u)du = F(u)+C$$

Bila $u=g(x)$ sehingga diferensial $du=g'(x)dx$, diperoleh

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(g(x))+C$$

Prosedur ini disebut metoda pengintegralan dengan substitusi atau **metoda substitusi**. Maka, jika integrand tampak sebagai komposisi fungsi dikalikan turunan fungsi 'dalam'nya, maka disarankan menggunakan metoda ini.

Perhatikan pula bahwa metoda merupakan proses balikan/inverse dari Aturan Rantai.

Why It Works?

Dari manakah ide metoda substitusi ini?

Perhatikan bahwa $F(g(x))$ adalah antirunan dari $f(g(x))\cdot g'(x)$ jika F adalah antiturunan dari f. ($F'(u)=f(u)$).

Menurut Aturan Rantai

$$\frac{d}{dx}F\left(g\left(x\right)\right)=F'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$$

Teorema

Diberikan fungsi g terturunkan dan F adaah antiturunan dari f.

Jika $u=g\left(x\right)$, maka

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx=\int f\left(u\right)du=F\left(u\right)+C=F\left(g\left(x\right)\right)+C$$

Menggunakan Tehnik Substitusi

Contoh Hitunglah $\int\left(2x+3\right)^{21}dx$

Misalkan $u=(2x+3)$ dengan $du=2dx$. Maka setelah disubtitusikan

$$\int\left(2x+3\right)^{21}dx=\int u^{21}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{22}u^{22}\right)=\frac{1}{44}\left(2x+3\right)^{22}+C$$

Contoh Hitunglah $\int\frac{dx}{\cos^2 2x}$

Ingat kembali bahwa $1/\cos^2 2x=\sec^2 2x$. Misalkan $u=2x$ sehingga $du=2dx$ atau $dx=\frac{1}{2}du$. Maka,

$$\int\frac{dx}{\cos^2 2x}=\int\sec^2 u\cdot\tfrac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int\sec^2 u\,du=\frac{1}{2}\tan u+C=\frac{1}{2}\tan 2x+C$$

Contoh Hitunglah:

a. $\int \frac{2}{\sqrt{3-4x^2}}dx$ b. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$ c. $\int x^3\sqrt{x^4+5}dx$

Jawab

a. Misalkan $u = 2x$ dan $a = \sqrt{3}$. Maka $du = 2dx$. Jadi,

$$\int \frac{2}{\sqrt{3-4x^2}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

b. Misalkan $u = e^x$ dan $a = 2$. Maka $du = e^x dx$. Jadi,

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4} = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{e^x}{2}\right) + C$$

c. $\int x^3\sqrt{x^4+5}dx$: Latihan

Sebelum Substitusi

Seringkali sebelum substitusi diputuskan, kita perlu memanipulasi fungsi *integrand* agar lebih memudahkan. Perhatikan contoh berikut, dimana bentuk kuadrat dilengkapkan dahulu sebelum menggunakan metoda substitusi.

Contoh

Tentukan $\int \frac{dx}{x^2-4x+9}$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+9} = \int \frac{dx}{x^2-4x+4+5} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+5} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Contoh

Tentukan $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= x - \tan^{-1} x + C$$

2. Integral Fungsi Trigonometrik

Pada pasal ini kita akan melihat bagaimana menkombinasikan metoda substitusi dengan kesamaan² trigonometri menjadi metoda yang sangat efektif untuk menyelesaikan beragam integral trigonometri

Beberapa tipe integral yang akan dibahas:

1. $\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$
2, $\int \sin^m x \cos^n x dx$
3. $\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx$

Tipe 1 $\int \sin^n x dx,\ \int \cos^n x dx$

Kasus 1: n genap

Turunkan pangkat dengan substitusi menggunakan kesamaan setengah sudut

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ dan } \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Contoh

$$\int \cos^2 x dx = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int \sin^4 2x dx = \int \left[\tfrac{1}{2}(1-\cos 4x)\right]^2 dx = \tfrac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right] dx$$
$$= \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{8}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\int \cos^2 4x dx$$

dengan menggunakan hasil sebelumnya kita peroleh

$$\int \cos^2 4x dx = \tfrac{1}{4}\int \cos^2 (4x)\,d(4x) = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2}(4x) + \tfrac{1}{4}\sin 2(4x) + C\right]$$

Jadi,

$$\int \cos^4 2x dx = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{8}\sin 2x + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{64}\sin 8x + C$$
$$= \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{8}\sin 2x + \tfrac{1}{64}\sin 8x + C$$

Kasus 2: n ganjil.

Setelah sin$x$ atau cos$x$ difaktorkan, gunakan kesamaan Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Contoh

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos dx$$
$$= \int \left(1 - 2\sin x + \sin^2 x\right)\cos x dx$$
$$= \sin x - \sin^2 x + \tfrac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Tipe 2 $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Kasus 1: *m* atau *n* bilangan ganjil positif.
Setelah sin*x* atau cos*x* difaktorkan, gunakan kesamaan Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Contoh

$$\int \cos^5 x \sin^{-2} x dx = \int \cos x \cos^4 x \sin^{-2} x dx = \int \cos x \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^{-2} x dx$$

$$= \int \cos x \sin^{-2} x dx - \int \sin^2 x \sin^{-2} x dx$$

$$= \int \sin^{-2} x d\left(\sin x\right) - \int dx = \frac{-1}{\sin x} - x + C$$

Kasus 2: *m* dan *n* bilangan genap positif.
Gunakan kesamaan setengah sudut

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

untuk mengurangi pangkat dalam *integrand*.

Contoh

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)\left(1 + \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + \cos 2x - 2\cos^2 2x + \cos^3 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \left(1 - \sin^2 2x\right)\cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 2x \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx - \int \sin^2 2x \cos 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin^3 2x}{6}\right] + C$$

Tipe 3

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx$$

Kesamaan-kesamaan yang dibutuhkan:

1. $\sin mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$
2. $\sin mx \sin nx = -\tfrac{1}{2}\left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]$
3. $\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$

Dengan kesamaan ini perkalian fungsi dapat diubah menjadi jumlah fungsi yang jelas lebih mudah ditangani.

Contoh

$$\int \sin 3x \cos 2x dx = \tfrac{1}{2}\int \left(\sin(5x) + \sin x\right) dx = \tfrac{1}{2}\int \sin 5x dx + \tfrac{1}{2}\int \sin x dx$$

$$= -\tfrac{1}{10}\cos 5x - \tfrac{1}{2}\cos x + C$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = -\tfrac{1}{2}\int \left(\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right)dx$$

$$= -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C, \qquad \text{jika } m \neq n$$

Latihan : 1. Hitunglah $\int \sin mx \sin nx dx$ untuk kasus $m = n$.

2. Hitunglah $\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad m \neq n.$

3. Substitusi Merasionalkan

Metoda yang akan dipelajari di sini juga sering disebut substitusi trigonometrik. Integral yang akan dibahas mempunyai integrand memuat bentuk-bentuk

$$\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2-a^2},$$

Umumnya metoda ini bertujuan untuk meng'eliminasi' tanda akar.

- $\sqrt[n]{ax+b}$

Dalam hal integrand memuat bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$, maka substitusi $u = \sqrt[n]{ax+b}$ dapat mengeliminasi tanda akar.

Contoh

Hitunglah $\int \frac{tdt}{\sqrt{3t+4}}$

Misalkan $u = 3t + 4$ sehingga $du = 3dt$ dan $t = \frac{1}{3}(u-4)$

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{3t+4}} = \int \frac{\frac{1}{3}(u-4)\frac{1}{3}du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{9}\int \frac{u-4}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{9}\int\left(\sqrt{u} - \frac{4}{\sqrt{u}}\right)du$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}}\right] + C = \frac{2}{27}(3t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{9}(3t+4)^{\frac{1}{2}} + C$$

Hitunglah $\int x\sqrt[3]{x+\pi}\,dx$

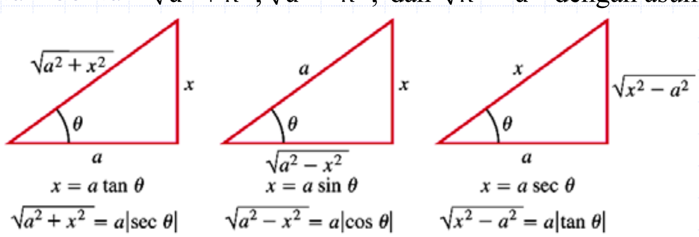
Misalkan $u = x + \pi$ sehingga $du = 3dx$ dan $x = u - \pi$

$$\int x\sqrt[3]{x+\pi}\,dx = \int (u-\pi)\sqrt[3]{u}\,du = \int u^{\frac{4}{3}}du - \pi\int u^{\frac{1}{3}}du$$

$$= \frac{3}{7}(x+\pi)^{\frac{7}{3}} - \frac{3\pi}{4}(x+\pi)^{\frac{4}{3}} + C$$

• $\sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$

Di sini kita akan menyelesaikan integral-intgeral yang memuat bentuk-bentuk $\sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{a^2-x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$ dengan asumsi $a > 0$.



Jika memuat $\sqrt{a^2-x^2}$, maka coba $x = a\sin\theta$, $\quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

Jika memuat $\sqrt{a^2+x^2}$, maka coba $x = a\tan\theta$ $\quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

Jika memuat $\sqrt{x^2-a^2}$, maka coba $x = a\sec\theta$ $\quad 0 \le \theta \le \pi, \quad \theta \ne \pi/2$

Mengapa pembatasan nilai θ perlu dilakukan?

Pada integral tentu kita setelah substitusi, dan kemudian menyelesaikan integral, kita perlu kembali ke variabel semula. Oleh karena itu, nilai θ perlu dibatasi agar substitusi sin θ, tan θ, dan sec θ mempunyai inverse.

Setelah melakukan subtitusi, beberapa penyederhanaan dapat dilakukan, dengan tujuan mengeliminasi tanda akar.

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = |a\cos\theta| = a\cos\theta$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\tan^2\theta} = \sqrt{a^2\sec^2\theta} = |a\sec\theta| = a\sec\theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = |a\tan\theta| = \pm a\sec\theta$$

Catatan: Karena $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ maka $\cos\theta \ge 0$.

Jadi, $|a\cos\theta| = a\cos\theta$. Berikan justifikasi untuk hasil lainnya.

Contoh Hitunglah $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}dx$

Pilih substitusi $u = 2\sin t$, sehingga $du = 2\cos t dt$. Maka

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{\sin t} 2\cos t dt = 2\int \frac{\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}}{\sin t}\cos t dt$$

$$= 2\int \frac{2(\cos t)(\cos t)}{\sin t}dt = 4\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt = 4\left(\int \csc dt - \int \sin t dt\right)$$

$$= 4\ln|\csc t - \cot u| + \cos t + C$$

Selanjutnya, karena $x = 2\sin t$ maka $\sin t = x/2$.

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-(x/2)^2} = \sqrt{\frac{4-x^2}{4}}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t} = \frac{2}{x} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \left(\frac{2}{x}\right)\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Dengan demikian,

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx = 4\ln\left|\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

Contoh: Hitunglah $\int_0^{\pi} \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,dx$

Agar lebih memudahkan, integral dipecah menjadi dua bagian

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi x}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x^2+\pi^2}}$$

Untuk integral pertama, pilih substitusi $u = x^2 + \pi^2$, sehingga $du = 2xdx$. Maka

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi x}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+\pi^2}} = \frac{\pi}{2}\int_{x=0}^{x=\pi} \frac{du}{\sqrt{u}} = \pi\sqrt{u}\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \pi\sqrt{x^2+\pi^2}\Big|_0^{\pi} = \pi\left(\pi\sqrt{2}-\pi\right) = \pi^2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Untuk integral kedua pilih substitusi $x = \pi \tan v$ sehingga $dx = \pi \sec^2 v dv$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x^2+\pi^2}} = \int_{x=0}^{x=\pi} \frac{\pi \sec^2 v dv}{\pi \sec v} = \int_{x=0}^{x=\pi} \sec v dv = \ln\left|\sec v + \tan v\right|\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} + \frac{x}{\pi}\right|\Bigg|_0^{\pi} = \ln\left|\sqrt{2}+1\right| - \ln\left|1+0\right| = \ln\left|\sqrt{2}+1\right|$$

Jadi, $\int_0^{\pi} \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,dx = \pi^2\left(\sqrt{2}-1\right) - \ln\left|\sqrt{2}+1\right|$

Melengkapkan Kuadrat

Bila bentuk kuadratik dibawah tanda akar masih dalam bentuk ax^2+bx+c maka perlu dilakukan melengkapkan kuadrat sebelum menggunakan metoda substitusi trigonometrik

Contoh Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$

$$16+6x-x^2 = -\left(x^2-6x-16\right) = -\left(x^2-6x+9-25\right) = -\left(\left(x-3\right)^2-5^2\right).$$

Jadi, $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-\left(x-3\right)^2}}$. Misalkan $v = x-3$. Maka,

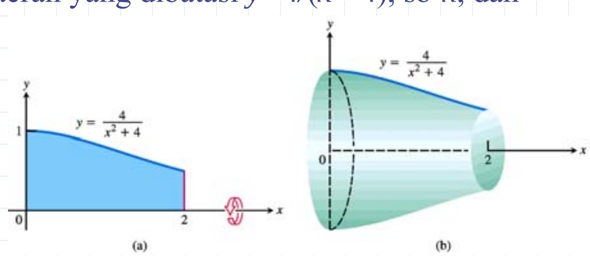
$$\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{5^2-v^2}}$$

Selanjutnya, substitusi $v = 5\sin w$, sehingga $dv = 5\cos w dw$. Maka

$$\int \frac{dv}{\sqrt{5^2-v^2}} = \int \frac{5\cos w dw}{\sqrt{5^2-5^2\sin^2 w}} = \int \frac{5\cos w dw}{5\cos w} = \int dw = \sin^{-1}\left(\frac{v}{5}\right)+C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{5}\right)+C$$

Contoh Tentukan volume benda putar yang dibangkitkan dengan memutar daerah yang dibatasi $y=4/(x^2+4)$, sb-x, dan garis $x=0$ dan $x=2$.



Latihan: Selesaikan $\int \frac{3x dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

4. Integral Parsial

Bila metoda substitusikan sebenarnya adalah balikan dari Aturan Rantai, maka metoda integral parsial didasarkan pada aturan turunan untuk perkalian:

Diberikan $u=u(x)$ dan $v=v(x)$ mempunyai turunan

$$D_x(u(x)\,v(x))=u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$$

atau

$$u(x)\,v'(x)=D_x(u(x)\,v(x))-u'(x)\,v(x)$$

Apabila kedua ruas diintegralkan

$$\int \left(u(x)v'(x)\right)dx=\int \frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right)dx-\int v(x)u'(x)\,dx=uv-\int v(x)u'(x)\,dx$$

Catatan : Diferensial $dv=v'(x)\,dx$ dan $du=u'(x)\,dx$

Teorema Integral Parsial

Jika fungsi-fungsi $u=u(x)$ dan $v=v(x)$ mempunyai turunan, maka

$$\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$$

Sedangkan integral parsial untuk integral tentu adalah

$$\int_{x=a}^{x=b} u\,dv=\left[uv\right]_{x=a}^{x=b}-\int_{x=a}^{x=b} v\,du=\left[u(b)v(b)-u(a)v(a)\right]-\int_{x=a}^{x=b} v\,du$$

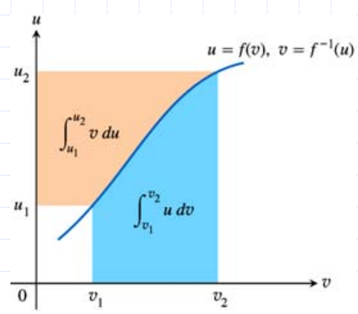
Misalkan

$u_1=u(a), u_2=u(b), v_1=v(a), v_2=v(b)$,

sehingga

$$\boxed{\int_{v_1}^{v_2} u\,dv=\left[u_2v_2-u_1v_1\right]-\int_{u_1}^{u_2} v\,du}$$

Catatan: pilihlah u dan dv sehingga $\int v\,du$ mudah dihitung.



Contoh Hitunglah $\int e^x \cos x dx$

Misalkan $u = e^x$, $dv = \cos dx$, sehingga $du = e^x dx$ dan $v = \sin x$

Maka $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$

Untuk integral ke dua, misalkan $w = e^x, dv = \sin x dx$. Maka $dw = e^x dx$ dan $v = -\cos x$. Diperoleh

$$\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

Dengan demikian

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right]$$

Pindahkan $\int e^x \cos x dx$ pada ruas kiri. Akhirnya diperoleh

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$$

Catatan Kuliah MA1223 Kalkulus Elementer II

Pada contoh di atas, perhatikan bahwa kita dapat menyelesaikan $\int e^x \cos x dx$ karena integral tersebut kembali muncul pada ruas kanan.

Contoh Hitunglah $\int_1^2 \ln x dx$

Misalkan $u = \ln x$, $dv = dx$, sehingga $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$

Maka $\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx = 2\ln 2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1$

Rumus Reduksi

Formula atau rumus berbentuk

$$\int f^n(x) dx = g(x) + \int f^k(x) dx, \qquad k < n$$

disebut rumus reduksi, karena nilai pangkat f mengalami penurunan. Formula semacam ini biasa ditemukan dalam integral parsial

Contoh Tentukan rumus reduksi untuk $\int \sin^n x dx$

Misalkan $u = \sin^{n-1} x, dv = \sin x dx.$

Maka $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx$ dan $v = -\cos x$. Jadi,

$$\begin{aligned}\int \sin^n x dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx\end{aligned}$$

Apabila $\int \sin^n x dx$ pada ruas kanan dipindahkan ke ruas kiri

$$n\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx$$

dan bila diselesaikan, diperoleh

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

5. Integral Fungsi Rasional

Metoda Pecahan Parsial

Metoda pecahan parsial adalah tehnik untuk mengintegralkan fungsi-fungsi rasional, yaitu fungsi-fungsi berbentuk

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad p(x) \text{ dan } q(x) \text{ adalah polinomial}$$

Ide dasar adalah metoda ini adalah menuliskan fungsi rasional sebagai jumlah dari fungsi pecahan yang lebih sederhana.

Contoh Tentukan $\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx$

Perhatikan bahwa $\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

Langkah berikutnya adalah menentukan koefisien A dan B. Ini dilakukan dengan mengalikan kedua ruas dengan $(x-1)(x+1)$ sehingga

$$5x-1 = A(x+1)+B(x-1) = (A+B)x+(A-B)$$

Maka haruslah $A+B=5$ dan $A-B=-1$. Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini diperoleh $A=2$ dan $B=3$

$$\int\left(\frac{5x-1}{x^2-1}\right)dx = \int\left[\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}\right]dx = \int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{3}{x+1}dx$$

$$= 2\int\frac{d(x-1)}{x-1}dx+3\int\frac{d(x+3)}{x+1} = 2\ln|x-1|+3\ln|x+1|$$

$$= \ln\left(|x-1|^2|x+1|^3\right)+C$$

Contoh Selesaikan $\int\frac{x+1}{x^3-4x^2+4x}dx$

$$\frac{x+1}{x^3-4x^2+4x} = \frac{x+1}{x(x^2-4x+4)} = \frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

Kalikan kedua ruas dengan $x(x-2)^2$, sehingga

$$(x+1) = A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$$

$$x+1 = (A+B)x^2+(-4A-2B+C)x+4A$$

Maka koefisien kedua polinomial haruslah sama. Ini memberikan sebuah sistem persamaan

$$A+B=0, -4A-2B+C=1, 4A=1$$

yang penyelesaiannya adalah $A=1/4, B=-1/4, C=3/2$. Maka,

$$\int\frac{x+1}{x^3-4x^2+4x}dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\int \frac{d(x-2)}{x-2} + \frac{3}{2}\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{2}\frac{1}{(x-2)}$$

Dua integral terakhir diselesaikan dengan substitusi $u = x - 2$.

Contoh Tentukanlah $\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 4x} dx$

$$\frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Setelah kedua ruas dikalikan dengan penyebut. maka diperoleh

$2x^2 + x - 1 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x = (A + B)x^2 + Cx + 4A.$

Kesamaan kedua polinomial berarti koefisien-koefisien harus sama.

Maka $2 = A + B, 1 = C, -1 = 4A.$ Penyelesaian sistem persamaan ini adalah

$$A = -1/4, B = 9/4, C = 1$$

Apabila digunakan pada integral di atas, kita peroleh

$$\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 4x} dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{4}\int \frac{9x + 4}{x^2 + 4} dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{9}{4}\int \frac{xdx}{x^2 + 4} + \int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{9}{4}\int \frac{xdx}{x^2 + 4} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

Untuk integral kedua, gunakan substitusi $w = x^2 + 4$ sehingga $dw = 2xdx$

$$\int \frac{xdx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\ln|w| = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 4|$$

Jadi,

$$\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 4x} dx = -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{9}{8}\ln|x^2 + 4| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

Contoh Selesaikan $\int \frac{x}{(1-x)(x^2+1)^2}\,dx$

$$\frac{x}{(1-x)(x^2+1)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}, \qquad x^2+1 \text{ irreducible}$$

Kalikan kedua ruas dengan $(1-x)(x^2+1)^2$ sehingga

$$x = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(1-x)(x^2+1) + (Dx+E)(1-x)$$

$$x = (A-B)x^4 + (B-C)x^3 + (2A-B+C-D)x^2 + (B-C+D-E)x + (A+E+C)$$

Maka koefisien kedua polinomial haruslah sama. Ini memberikan sebuah sistem persamaan

$$A-B=0, B-C=0, 2A-B+C-D=0,$$
$$B-C+D-E=1, A+C+E=0$$

Penyelesaiannya adalah $A=B=C=1/4, D=1/2, E=-1/2$. Maka,

$$\int \frac{x}{(1-x)(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x} + \frac{1}{4}\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2}$$

Substitusi $u = 1-x$ dan $v = x^2+1$, maka $du = -dx, dv = 2xdx$.

$$\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x} + \frac{1}{4}\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+1} = -\frac{1}{4}\int\frac{du}{u} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v} + \int\frac{dx}{x^2+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|1-x| + \frac{1}{8}\ln|x^2+1| + \frac{1}{4}\tan^{-1}x$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v^2}\right) - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Untuk menyelesaikan integral terakhir, misalkan $x = \tan\theta, dx = \sec^2\theta d\theta$, dan $x^2 + 1 = \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\left(\sec^2\theta\right)^2} = \int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}$$

$$= \frac{\tan^{-1}x}{2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{4} = \frac{\tan^{-1}x}{2} + \frac{2\left(x/\sqrt{x^2+1}\right)\left(1/\sqrt{x^2+1}\right)}{4}$$

$$= \frac{\tan^{-1}x}{2} + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)}.$$

Jadi,

$$\int \frac{x}{(1-x)\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{1}{4}\ln|1-x| + \frac{1}{8}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{4}\tan^{-1}x$$

$$-\frac{1}{4\left(x^2+1\right)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\tan^{-1}x}{2} + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|1-x| + \frac{1}{8}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{4}\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)} + C$$

ALGORITMA DEKOMPOSISI PECAHAN PARSIAL

Langkah 1: Lakukan pembagian sehingga diperoleh polinom $P(x)$ dan $r(x)$ sehingga

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = P(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Jika derajat$\big(p(x)\big) <$ derajat$\big(q(x)\big)$ maka $P(x) = 0$ dan $r(x) = p(x)$

Langkah 2 : Faktorkan $q(x)$ dengan suku perkalian dari bentuk

$(ax+b)^n$ atau $(ax^2+bx+c)^n$ dengan ax^2+bx+c irreducible yaitu $ax^2+bx+c=0$ tidak mempunyai akar.

Langkah 3: Tulis $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ sebagai jumlah dari fungsi pecahan yang lebih sederhana, disebut pecahan parsial, sebagai berikut

a. Untuk tiap faktor $(x+\alpha)^k$ diperoleh

$$\frac{A_1}{x+\alpha} + \frac{A_2}{(x+\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x+\alpha)^k}$$

b. Untuk tiap faktor $(ax^2+bx+c)^k$ diperoleh

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_kx+C_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Langkah 4: Kalikan kedua ruas dengan $q(x)$ sehingga diperoleh

$R(x)q(x) =$ polinom dengan koefisien memuat A_i, B_i dan C_i

Dari kesamaan di atas, semua konstanta A_i, B_i dan C_i dapat ditentukan.

Soal PR Bab 8

- 8.1 : 4, 6, 12, 16, 19, 33, 34, 48, 52, 59, 64, 66.
- 8.2 : 4, 6, 9, 13, 21, 22, 23, 26, 31.
- 8.3 : 3, 6, 12, 20, 23, 27-9, 31, 33.
- 8.4 : 2, 6, 17, 21, 32, 39, 44, 47, 55, 61, 69, 74, 81, 90.
- 8.5 : 5, 6, 9, 11, 12, 19, 22, 23, 25, 39, 44.