BAB VI. PENGGUNAAN INTEGRAL

Departemen Teknik Kimia
Universitas Indonesia

BAB VI. PENGGUNAAN INTEGRAL

- Luas Daerah di Bidang
- Volume Benda Pejal di Ruang:
  - Metode Cincin
  - Metode Cakram
  - Metode Kulit Tabung
- Panjang Kurva
- Momen dan Pusat Massa

I. LUAS DAERAH

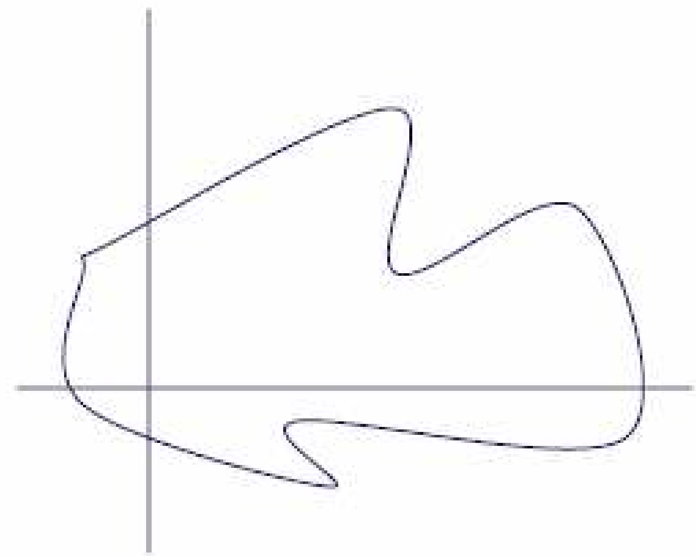
Perhitungan luas suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi y = f(x), garis x = a, garis x = b dan sumbu X telah kita bahas dalam pembahasan integral tentu.

Namun untuk daerah yang lebih kompleks akan kita bahas secara detil pada perhitungan luas daerah dengan menggunakan integral tentu.

Selain dari itu, integral tentu akan kita gunakan juga untuk menghitung volume benda pejal yaitu benda yang dihasilkan bila suatu daerah diputar dengan suatu sumbu putar. Panjang kurva akan kita bahas pada bagian akhir dari bab ini.

Luas Daerah di Bidang

Diketahui daerah di bidang seperti pada gambar di samping, bagaimana kita dapat menghitung luas daerah tersebut?



Pada prinsipnya, kita dapat membagi daerah tersebut menjadi beberapa bagian, di mana tiap bagian merupakan daerah di antara dua kurva. Jadi persoalannya adalah bagaimana menghitung luas daerah di antara dua kurva, yang akan dibahas selanjutnya.

Misal suatu daerah dibatasi oleh y = f(x) $\geq$ 0, x = a , x = b dan sumbu X. Maka luas daerah dihitung dengan integral tentu sebagai berikut :

$$L = \int_a^b f(x)\ dx$$

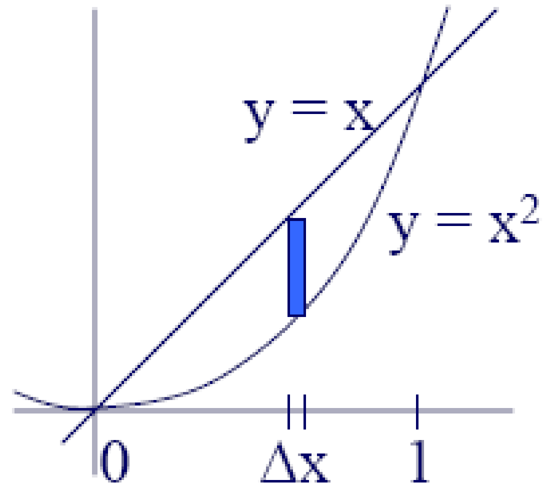
Bila f(x) $\leq$ 0 maka integral dari f(x) pada selang [a,b] akan bernilai negatif atau nol. Oleh karena itu luas daerah yang dibatasi oleh y = f(x) $\leq$ 0, garis x = a, x = b dan sumbu X, dituliskan sebagai berikut :

$$L = -\int_a^b f(x)\ dx$$

Untuk daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi yang dinyatakan secara eksplisit dalam peubah y, yakni x = v(y), garis y = c, y = d dan sumbu Y, maka luas daerah :

$$L = \int_c^d v(y)\ dy$$

Contoh 1. Hitung luas daerah (tertutup) yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x$.



Jawab: Misal kita 'iris' daerah tersebut secara vertikal, dan tiap irisannya mempunyai lebar Δx dan tinggi kira-kira sama dengan $x - x^2$, sehingga luasnya adalah $\Delta L \approx (x - x^2)\Delta x$ (lihat gambar). Jadi, luas daerah tersebut secara keseluruhan adalah $L \approx \sum_x (x - x^2)\Delta x$. Ambil limitnya, kita peroleh

$$L = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Contoh 2 :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, sumbu X, garis $x = 0$ dan $x = 3$.

Jawab :

Kita lihat bahwa $f(x) \geq 0$ pada selang [0,1] dan $f(x) \leq 0$ pada selang [1,3].

Luas daerah :

$$L = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx - \int_1^3 \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx$$

$$= 5\tfrac{3}{4}$$

Bila suatu daerah dibatasi oleh dua buah grafik fungsi, misal y = f(x) dan y = g(x) diberikan sebagai berikut :

(1) Misal daerah dibatasi oleh grafik y = f(x), y = g(x), x = a dan x = b dengan f(x) $\geq$ g(x) untuk x $\in$ [a,b]. Maka luas daerah :

$$L = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

(2) Misal daerah dibatasi oleh grafik x = w(y), x = v(y), y = c dan y = d dengan w(y) $\geq$ v(y) untuk y $\in$ [c,d]. Maka luas daerah :

$$L = \int_c^d \left[w(y) - v(y) \right] dy$$

Contoh 3 :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh
$y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.
Jawab :

Langkah pertama yang dilakukan adalah mencari titik potong kedua kurva. Didapatkan titik potong keduanya yaitu (¼,-1) dan (4,4).

Pada selang [-1,4], $\frac{3y+4}{4} \geq \frac{y^2}{4}$. Maka luas daerah $L = \int_{-1}^{4} \left(\frac{3y+4-y^2}{4} \right) dy = \frac{125}{24}$

Soal Latihan

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh grafik berikut :

1. $y = x^3 - 4x^2 + 3x,\ y = 0\ x = 0\ ,\ x = 3$
2. $x = y^2 - 4y,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 4$
3. $x^2 = y,\ y = x + 2$
4. $y = x^3\ ,\ y = -x,\ y = 8$
5. $y^2 = -x,\ y = x - 6,\ y = -1,\ y = 4$
6. $y = x,\ y = 4x,\ y = -x + 2$
7. $y = x^3 - 2x^2\ ,\ y = 2x^2 - 3x,\ x = 0\ ,\ x = 3$
8. $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0\ ,\ x = 2\pi\ .$

II. VOLUME BENDA PEJAL

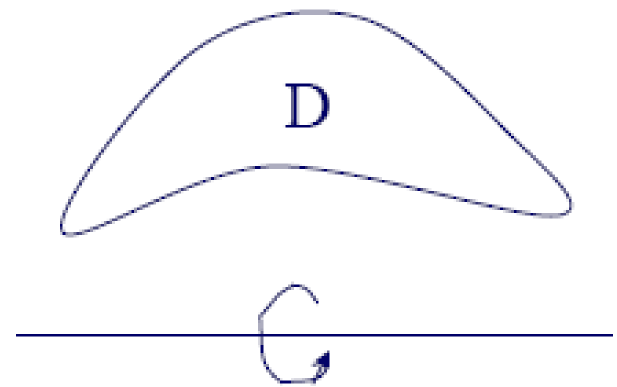
Benda putar yang sederhana dapat kita ambil contoh adalah tabung dengan besar volume adalah hasilkali luas alas (luas lingkaran) dan tinggi tabung. Volume dari benda putar secara umum dapat dihitung dari hasilkali antara luas alas dan tinggi. Bila luas alas kita nyatakan dengan A(x) dan tinggi benda putar adalah panjang selang [a,b] maka volume benda putar dapat dihitung menggunakan integral tentu sebagai berikut :

$$V = \int_a^b A(x)\ dx$$

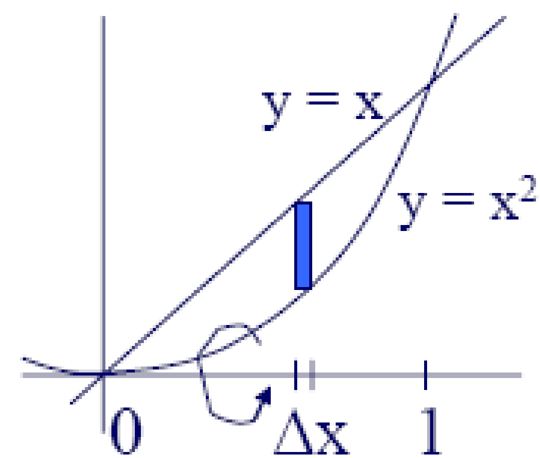
Untuk mendapatkan volume benda putar yang terjadi karena suatu daerah diputar terhadap suatu sumbu, dilakukan dengan menggunakan dua buah metode yaitu metode cakram dan kulit tabung.

Volume Benda Pejal di Ruang; Metode Cincin

Bila suatu daerah D diputar mengelilingi sebuah sumbu, maka akan diperoleh suatu benda putar. Bagaimana menghitung volumenya?



Contoh 2. Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x$ diputar mengelilingi sumbu-x. Hitung volume benda putar yang terbentuk.



Jawab: Tiap irisan membentuk cincin dengan jari-jari luar x^2, jari-jari dalam x^4, dan tebal Δx, yang volume-nya adalah $\Delta V \approx \pi(x^2 - x^4)\Delta x$. Jumlahkan dan ambil limitnya, kita peroleh

$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

Metode Cakram

Misal daerah dibatasi oleh y = f(x), y = 0, x = a dan x = b diputar dengan sumbu putar sumbu X. Volume benda pejal/padat yang terjadi dapat dihitung dengan memandang bahwa volume benda padat tersebut merupakan jumlah tak berhingga cakram yang berpusat di titik-titik pada selang [a,b].

Misal pusat cakram (x_o,0) dan jari-jari r = f(xo). Maka luas cakram dinyatakan :

$A(x_o) = \pi f^2(x_o)$. Oleh karena itu, volume benda putar :

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x) \right]^2 dx$$

Sedang bila grafik fungsi dinyatakan dengan x = w(y), x = 0, y = c dan y = d diputar mengelilingi sumbu Y maka volume benda putar :

$$V = \int_c^d \pi \left[w(y) \right]^2 dy$$

Bila daerah yang dibatasi oleh y = f(x) ≥ 0 , y = g(x) ≥ 0 { f(x) ≥ g(x) untuk setiap x є [a,b] }, x = a dan x = b diputar dengan sumbu putar sumbu X maka volume :

$$V = \int_c^d \pi \left(\left[w(y) \right]^2 - \left[v(y) \right]^2 \right) dy$$

Bila daerah yang dibatasi oleh x = w(y) ≥ 0 , x = v(y) ≥ 0 { w(y) ≥ v(y) untuk setiap y є [c,d] }, y = c dan y = d diputar dengan sumbu putar sumbu Y maka volume :

$$V = \int_a^b \pi \left(\left[f(x) \right]^2 - \left[g(x) \right]^2 \right) dx$$

Contoh

Hitung Volume benda putar bila daerah yang dibatasi oleh : $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar mengelilingi

a. Sumbu X.

b. Sumbu Y

Jawab :

Kedua kurva berpotongan di (0,2) dan (2,4).

a. Pada selang [0,2], $\sqrt{8x} \geq x^2$. Volume benda putar =

$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(\sqrt{8x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx = \frac{48}{5} \pi$$

b. Pada selang [0,4], $\sqrt{y} \geq \frac{y^2}{8}$. Volume benda putar =

$$V = \pi \int_0^4 \left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 \right] dy = \frac{272}{15} \pi$$

Contoh :

Hitung volume benda putar bila daerah yang dibatasi oleh : $y = 2 - x^2$, $y = -x$ dan sumbu Y, bila diputar mengelilingi garis $y = -2$

Jawab :

Kedua kurva berpotongan di (-1,1) dan (2,-2). Pada selang [-1,0] berlaku $2 - x^2 \geq -x$.

Jarak kurva $y = 2 - x^2$ dan $y = -x$ terhadap sumbu putar (garis $y = -2$) dapat dipandang sebagai jari-jari dari cakram, berturut-turut adalah $(4 - x^2)$ dan $(2 - x)$. Oleh karena itu, volume benda putar :

$$V = \pi \int_{-1}^{0} \left[\left(4 - x^2\right)^2 - (2 - x)^2 \right] dx = \frac{36}{5}\pi$$

Metode Kulit Tabung

Metode berikut sebagai alternatif lain dalam perhitungan volume benda putar yang mungkin lebih mudah diterapkan bila kita bandingkan dengan metode cakram.

Benda putar yang terjadi dapat dipandang sebagai tabung dengan jari-jari kulit luar dan dalamnya berbeda, maka volume yang akan dihitung adalah volume dari kulit tabung.

Untuk lebih memperjelas kita lihat uraian berikut. Pandang tabung dengan jari-jari kulit dalam dan kulit luar berturut-turut r1 dan r2, tinggi tabung h. Maka volume kulit tabung adalah :

$$\Delta V = \left(\pi r_2 - \pi r_1\right) h = 2\pi r h \, \Delta r$$

$$\text{dengan} : \frac{r_2 - r_1}{2} = r \, (\text{rata} - \text{rata jari} - \text{jari}), \; r_2 - r_1 = \Delta r$$

Bila daerah yang dibatasi oleh y = f(x), y = 0, x = a dan x = b diputar mengelilingi sumbu Y maka kita dapat memandang bahwa jari-jari r = x , $\Delta r = \Delta x$ dan tinggi tabung h = f(x). Oleh karena itu volume benda putar =

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\ dx}$$

Misal daerah dibatasi oleh kurva y = f(x), y = g(x) { f(x) $\geq$ g(x) , x $\in$ [a,b] }, x = a dan x = b diputar mengelilingi sumbu Y. Maka volume benda putar =

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x\left[f(x) - g(x)\right]\ dx}$$

Bila daerah dibatasi oleh grafik yang dinyatakan dengan x = w(y), x = 0, y = c dan y = d diputar mengelilingi sumbu X. maka volume =

$$\boxed{V = \int_c^d 2\pi y\ w(y)\ dy}$$

Sedang untuk daerah yang dibatasi oleh x = w(y), x = v(y) { w(y) $\geq$ v(y), y$\in$[c,d]}, y = c dan y = d diputar mengelilingi sumbu X. Maka volume benda putar =

$$\boxed{V = \int_c^d 2\pi y\left[w(y) - v(y)\right]\ dy}$$

Contoh :

Hitung volume benda putar bila daerah yang terletak di kuadran pertama dibawah parabola
$y = 2 - x^2$ dan di atas parabola $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu Y.

Jawab :

Kedua parabola berpotongan di (-1,1) dan (1,1). Pada selang [0,1], $2 - x^2 \geq x^2$. Bila digunakan metode kulit tabung, volume =

$$V = 2\pi \int_0^1 x\left[\left(2 - x^2\right) - x^2\right] dx = \pi$$

Bila kita gunakan metode cakram, maka daerah kita bagi menjadi dua bagian yaitu : pada selang 0 ≤ y ≤ 1 dibatasi $x = \sqrt{2-y}$ dan sumbu Y sedang pada selang 1 ≤ y ≤ 2 dibatasi $x = \sqrt{y}$ dan sumbu Y. Oleh karena itu volume =

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy + \pi \int_1^2 \left(\sqrt{2-y}\right)^2 dy = \pi$$

Contoh :

Hitung volume benda putar bila daerah D yang dibatasi oleh $y = 1 - x^2$, sumbu X dan sumbu Y bila diputar mengelilingi garis x = 1

Jawab :

Misal di ambil sembarang nilai x pada daerah D maka didapatkan tinggi benda pejal, ($1 - x^2$) dan jari-jari (jarak x terhadap sumbu putar / garis x = 1), (1 + x). Oleh karena itu, volume benda putar :

$$V = 2\pi \int_{-1}^{0} (1+x)\left(1-x^2\right)dx = \frac{5}{6}\pi$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 8) Hitung volume benda putar bila daerah berikut diputar dengan sumbu putar sumbu X.

1. $y = x^2, x = 0, x = 2, y = 0$
2. $y = 1/x, x = 1, x = 4, y = 0$
3. $y = 9 - x^2, y = 0$
4. $y = x^2, y = 4x$
5. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \pi/4$
6. $y = x^2 + 1, y = x + 3$
7. $y = \sqrt{x}, y = x$
8. $y = x^2, y = x^3$.

(Nomor 9 sd 15). Hitung volume benda putar bila daerah berikut diputar mengelilingi sumbu Y.

9. $x = 1 - y^2, x = 0$
10. $x = \sqrt{\cos y}, y = 0, y = \dfrac{\pi}{2}, x = 0$
11. $y = 2/x, y = 1, y = 3, x = 0$
12. $y = x^2 - 1, x = 2, y = 0$
13. $y = x^2, x = y^2$.
14. $x = y^2, x = y + 2$
15. $x = 1 - y^2, x = 2 + y^2, y = -1, y = 1$

Latihan

16. Hitung volume benda putar dari daerah yang terletak di kuadran pertama yang dibatasi oleh $y^2 = x^3$, garis $x = 4$ dan sumbu X. Bila diputar mengelilingi
    a. Garis $x = 4$
    b. Garis $y = 8$
17. Hitung volume benda putar dari daerah yang terletak di kuadran pertama yang dibatasi oleh $y^2 = x^3$, garis $y = 8$ dan sumbu Y. Bila diputar mengelilingi
    a. Garis $x = 4$
    b. Garis $y = 8$

(Nomor 18 sd 21) Hitung volume benda putar dengan sumbu putar sumbu Y untuk daerah yang dibatasi oleh:

18. $y = \cos x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,
19. $y = 2x - 1$, $y = -2x + 3$, $x = 3$
20. $x = y^2$, $y = x^2$.
21. $y = 2x - x^2$, $y = 0$

Latihan

(Nomor 22 sd 25) Hitung volume benda putar dengan sumbu putar sumbu X untuk daerah yang dibatasi oleh:

6. $y^2 = x, y = 1, x = 0$
7. $x = 2y, y = 2, y = 3, x = 0$
8. $y = x^2, x = 1, y = 0$
9. $xy = 4, x + y = 5$

(Nomor 26 sd 29) Gambar dan arsir daerah D dan hitung volume benda putar yang terjadi bila daerah D dan sumbu putarnya diberikan berikut :

26. $y = \sqrt{x}\ , x = 4 , y = 0$; garis $x = 4$
27. $y = 1 - x^2$ ($x \geq 0$), $x = 0$, $y = 0$; garis $x = 2$
28. $x = y^2$, $y = 2$, $x = 0$; garis $y = 2$
29. $x = \sqrt{2y} + 1, y = 2 , x = 0, y = 0$; garis $y = 3$

III. PANJANG KURVA

Persamaan kurva seringkali dinyatakan dengan peubah x dan y. Namun adakalanya dinyatakan dengan parameter. Kita dapat mengambil contoh berikut. Persamaan lingkaran: $x^2 + y^2 = a^2$ dapat juga dituliskan dengan x = a cos t dan y = a sin t dengan $0 \leq t \leq 2\pi$.

t disebut **parameter**.

Dalam perhitungan panjang kurva bidang yang dinyatakan dalam parameter, kita membatasi untuk kurva bidang yang smooth atau mulus. Untuk itu diberikan definisi berikut :

Definisi : Kurva Mulus

Kurva yang ditentukan oleh pasangan persamaan parameter, $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ dikatakan **smooth (mulus)** bila turunan pertama f ' dan g ' ada dan kontinu pada selang [a,b], f ' dan g ' tidak secara bersama-sama bernilai nol pada selang [a,b].

Misal f(x) kontinu pada [a,b]. Maka untuk menghitung panjang kurva f(x) sepanjang selang [a,b] dilakukan sebagai berikut :

Bagi selang [a,b] menjadi n sub selang sama panjang dengan panjang sub selang Δx. Pada sub selang ke-k, [x_{k-1}, x_k] didapatkan nilai fungsi pada ujung sub selang yaitu $f(x_{k-1})$ dan $f(x_k)$. Misal L_k merupakan panjang ruas garis dari titik $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ke $(x_k, f(x_k))$. Maka :

$$L_k = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right]^2}$$

Dari teorema nilai rata-rata, $\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta x} = f'(x_k^*)$, $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ maka didapatkan: $L_k = \sqrt{1 + \left[f'(x_k^*)\right]}\,\Delta x$

Jadi panjang kurva f(x) sepanjang selang [a,b] didekati oleh :

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'\left(x_k^*\right)\right]^2}\,\Delta x \quad \text{untuk n} \rightarrow \infty.$$

Atau

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Bila kurva dinyatakan sebagai x = w(y), maka panjang kurva pada selang [c,d] :

$$L = \int_c^d \sqrt{1+\left[w'(y)\right]^2}\,dy$$

Sedangkan bila persamaan dinyatakan dengan persamaan parameter, x = f(t), y = g(t) , a ≤ t ≤ b maka panjang kurva =

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2+\left[g'(t)\right]^2}\,dt$$

atau

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2+\left[\frac{dy}{dt}\right]^2}\,dt$$

Contoh :

Hitung panjang kurva $y = x^{3/2}$ dari titik (1,1) sampai titik (4,8) !

Jawab :

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\;\; dx = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - \frac{13}{8}\sqrt{13}\right)$$

Contoh :

Hitung panjang keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$

Jawab :

Persamaan $x^2 + y^2 = a^2$ diubah menjadi persamaan parameter : x = a cos t dan y = a sin t dengan $0 \le t \le 2\pi$. Substitusikan : dx/dt = - a sin t dan dy/dt = a cos t ke dalam :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[\frac{dy}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dx}{dt}\right]^2}\, dt = 2\pi a$$

Catatan : Bandingkan hasil di atas dengan hasil yang diperoleh bila kita gunakan rumus untuk mencari keliling lingkaran dengan jari-jari r = a.

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 7) Hitung panjang kurva berikut :

1. $y = x^{3/2}$ dari (1,1) ke $(2,2\sqrt{2})$
2. $y = 3x^{3/2}$ dari x = 0 ke x = 1
3. $y = \dfrac{x^4}{16} + \dfrac{1}{2x^2}$ dari x = 2 ke x = 4
4. $24xy = y^4 + 48$ dari y = 2 ke y = 4
5. $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{y^{-2}}{4}$ dari y = 1 ke y = 4
6. $x = \dfrac{1}{3}\left(y^2 + 2\right)^{3/2}$ dari y = 0 ke y = 1
7. $y = \displaystyle\int_1^x \sqrt{u^3 - 1}\, du \quad , 1 \le x \le 2$

(Nomor 8 sd 11) Sket grafik dari persamaan parameter yang diberikan dan tentukan panjangnya.

8. $x = t^3, y = t^2$; $0 \le t \le 4$.

9. $x = 3t^2 + 2$, $y = 2t^3 - 1$; $1 \le t \le 3$.

10. $x = 4 \cos t + 5$, $y = 4 \sin t - 1$; $0 \le t \le 2\pi$.

11. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 4\pi$.

12. Daerah D merupakan daerah tertutup yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x^3}$, $y = 1$ dan $x = 4$.

   a. Gambar dan arsir daerah D

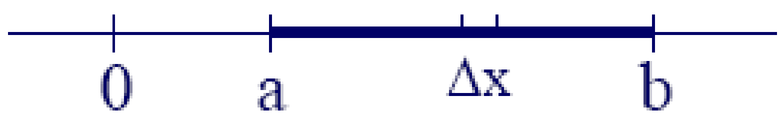
   b. Hitung luas daerah D

   c. Hitung keliling daerah D

   d. Hitung volume benda putar yang terjadi bila daerah D diputar terhadap garis $x = 1$.

Momen dan Pusat Massa

Misalkan kita mempunyai kawat yang kita letakkan pada garis bilangan real sehingga menutupi selang [a,b]. Misalkan diketahui rapat massa kawat tersebut di titik x adalah $\rho(x)$. Maka, massa potongan kawat yang lebarnya Δx kurang-lebih akan sama dengan $\Delta m \approx \rho(x)\Delta x$.



Jumlahkan dan ambil limitnya, kita peroleh massa kawat tersebut:

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Kita juga dapat menghitung momennya terhadap titik 0. (Momen = jarak × massa.) Pertama, momen tiap potongan kawat dengan lebar Δx terhadap 0 adalah $\Delta M \approx x\rho(x)\Delta x$. Jumlahkan dan ambil limitnya, kita peroleh momen kawat tersebut terhadap 0:

$$M = \int_a^b x\rho(x)dx.$$

Dengan mengetahui massa kawat dan momennya terhadap 0, kita dapat menentukan pusat massanya, yakni

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}.$$

Contoh

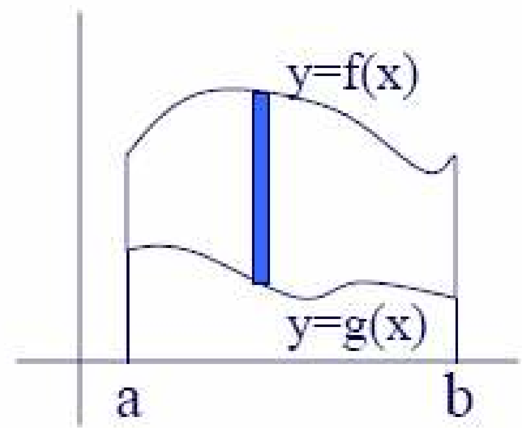
Diketahui kawat dengan panjang 10 cm dan rapat massa di setiap titik sama dengan 3 kali kuadrat jarak titik tsb dari salah satu ujung kawat.

Tentukan massa dan pusat massa kawat tersebut.

Jawab: Kita letakkan kawat tersebut sehingga menempati selang [0,10] pada garis bilangan real. Maka, rapat massanya di titik x adalah ρ(x) = 3x2. Massa kawat tersebut dan momenya terhadap 0 adalah

$$m = \int_0^{10} 3x^2 dx = 1000; \qquad M = \int_0^{10} 3x^3 dx = 7500.$$

Sekarang misalkan kita mempunyai suatu keping homogen (rapat massanya ρ konstan) yg menempati daerah D yang terletak di antara dua kurva, sebut y = *f*(x) dan y = *g*(x), seperti pada gambar. Iris daerah D secara vertikal. Maka, massa, momen terhadap sumbu-y, dan momen terhadap sumbu-x dari tiap irisannya adalah



$$\Delta m \approx \rho\left[f(x) - g(x)\right]\Delta x;$$
$$\Delta M_y \approx x\rho\left[f(x) - g(x)\right]\Delta x;$$
$$\Delta M_x \approx \tfrac{1}{2}\rho\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]\Delta x.$$

Jumlahkan dan ambil limitnya, kita peroleh massa keping dan momennya terhadap kedua sumbu koordinat, yakni

$$m = \rho\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx;$$

$$M_y = \rho\int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right]dx;$$

$$M_x = \tfrac{1}{2}\rho\int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx.$$

Koordinat pusat massa keping tersebut adalah

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Contoh

Diketahui keping homogen dengan rapat massa 1 yang menempati daerah yang dibatasi oleh kurva
$y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$.
Tentukan massa dan pusat massa keping tersebut.

Jawab. Massa keping tersebut adalah

$$m = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{1}{3}.$$

Momennya terhadap kedua sumbu koordinat adalah

$$M_y = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)\,dx = \tfrac{3}{20};$$

$$M_x = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (x - x^4)\,dx = \tfrac{3}{20}.$$

Dengan demikian pusat massanya adalah (9/10,9/10). (Di sini pusat massanya terletak pada garis $y = x$, yang merupakan sumbu simetri keping tersebut.)

<u>Latihan</u>. Tentukan massa dan pusat massa keping setengah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ bagian atas.

Teorema Pappus. Jika suatu daerah D pada bidang diputar mengelilingi suatu sumbu yang tidak me-motong D, maka volume benda putar yang terbentuk sama dgn luas daerah D kali keliling lingkaran yang ditempuh oleh titik pusat massa D.